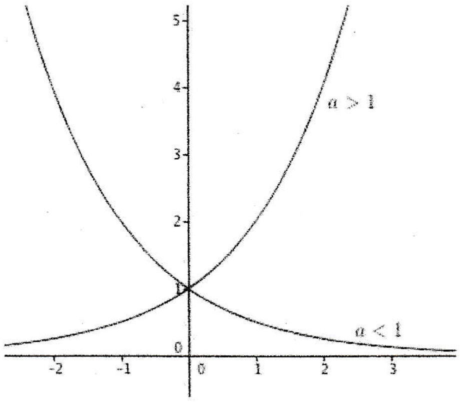
Corrigé

10 Exponentielle de base a

1. Définition et premières propriétés

On a déjà étudié les suites géométriques. Une suite géométrique de premier terme 1 et de raison a s'écrit $u_n = a^n$. Ici, nous nous intéressons à ce type de phénomène, mais pour des fonctions.

Définition 10.1 La fonction $x \mapsto a^x$, avec $a > 0$, s'appelle exponentielle de base a.



Exercice 10.1 Rémi place 500 euros au taux annuel de 4,5% pendant n années et $0 < n < 18$. soit (u_n) le capital à l'année n.

1. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, et préciser sa raison.

   On multiplie toujours par le même nombre

   $q = 1,045$

   (augmenter de $t\%$, c'est multiplier par $1 + \frac{t}{100}$)

2. Quel est le capital au bout de 3 ans ? De 17 ans ?

   $u_3 = 500 \times 1,045^3 = 570,5831$

   $u_{17} = 500 \times 1,045^{17} = 1056,688$

3. Soit f la fonction définie pour tout réel x appartenant à $[0;18]$ par $f(x) = 500 \times (1,045)^x$

   (a) Comment s'appelle ce type de fonction ? Quelle est sa "base" ?

   Exponentielle de base 1,045

   (b) Calculer $f(1,5)$ et $f(\frac{7}{3})$

   $f(1,5) = 536,1269$ $\qquad$ $f(\frac{7}{3}) = 554,0828$

(c) Interprétez les résultats de la question précédente dans le cadre de l'exercice.

Au bout de 1 an 1/2 il a 534,13€

Au bout de $\frac{7}{3}$ d'années il a 551,08 €

Propriété 10.1 Les règles de calcul sur les puissances s'appliquent aux exponentielles de base a :

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$
- $(a^x)^n = a^{nx}$

Exercice 10.2 1. Écrire plus simplement avec la forme a^x les expressions suivantes :

(a) $(1,3^2)^{0,2} \times \frac{1,3^{-3}}{1,3^{2,5}}$

$= 1,3^{0,4} \times \frac{1,3^{-3}}{1,3^{2,5}} = \frac{1,3^{0,4-3}}{1,3^{2,5}} = \frac{1,3^{-2,6}}{1,3^{2,5}} = 1,3^{-2,6-2,5} = \boxed{1,3^{-5,1}}$

(b) $\frac{3,5^{-2} \times 3,5^{-1,5}}{5^{-3,5}}$

$\frac{3,5^{-2-1,5}}{5^{-3,5}} = \frac{3,5^{-3,5}}{5^{-3,5}} = \left(\frac{3,5}{5}\right)^{-3,5} = \boxed{(0,7)^{-3,5}}$

2. Démontrer par le calcul que $(1,4^x - 2)(1,4^x + 4) = 1,4^{2x} + 2 \times (1,4)^x - 8$

$(1,4^x - 2)(1,4^x + 4) = +1,4^x \cdot 1,4^x + 1,4^x \cdot 4 - 2 \cdot 1,4^x - 2 \times 4$

$= 1,4^{2x} + 4 \times 1,4^x - 2 \times 1,4^x - 8$

$= \boxed{1,4^{2x} + 2 \cdot 1,4^x - 8}$

3. Simplifier l'expression $\frac{1,1^{x-0,5}}{2,2} + \frac{1,1^{x-0,5}}{2,2}$

$\frac{1,1^{x-0,5}}{2,2} + \frac{1,1^{x-0,5}}{2,2} = \frac{1,1^{x-0,5} + 1,1^{x-0,5}}{2,2} = \frac{2 \times 1,1^{x-0,5}}{2,2}$

$= \frac{2 \times 1,1^{x-0,5}}{2 \times 1,1} \underset{:2}{\overset{:2}{=}} \frac{1,1^{x-0,5}}{1,1^1} = 1,1^{x-0,5-1} = \boxed{1,1^{x-1,5}}$

2. Sens de variation

Propriété 10.2 Comme on l'a vu sur la figure proposée en début de chapitre :

- Si $0 < a < 1$, l'exponentielle base a est décroissante,
- Si $a > 1$, l'exponentielle base a est croissante,
- Si $a = 1$, l'exponentielle base a est constante égale à 1.

Propriété 10.3 En revanche, si l'on multiplie l'exponentielle par une constante k :

- Si $k > 0$, le sens de variation de ka^x est le même que celui de a^x,
- Si $k < 0$, le sens de variation de ka^x est l'inverse de celui de a^x,
- Si $k = 0$, la fonction ka^x est constante égale à 0.

Exercice 10.3 Soit la fonction $f(x) = 2 \times (0,75)^x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Calculer l'image de $-1,5$, puis $f(0)$.

$f(-1,5) = 2 \times (0,75)^{-1,5} \simeq 3,0792$

$f(0) = 2 \times (0,75)^0 = 2$

2. Donner le sens de variation de f grâce aux propriétés ci-dessus.

$0,75 > 0$ et $2 > 0$ donc f est $\searrow$

3. Démontrer que la courbe représentative de f passe par le point~~s~~ $(0;2)$ et par le point $(0,5 : \sqrt{2})$ 3

$f(0) = 2$ donc C_f passe par $(0;2)$

$f(0,5) = 2 \times 0,75^{0,5} = 2 \times \sqrt{0,75} = 2 \times \sqrt{\frac{3}{4}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

donc C_f passe par $(0,5; \sqrt{3})$

Exercice 10.4 Une usine fabrique des valves pour robinets. Le 1er janvier 2019, elle en produit 2 000. Sa production journalière P, en milliers d'unités, augmente de façon continue de 3% chaque mois à partir de cette date.
Au bout de n mois écoulés, on a donc la suite $P_n = 2 \times (1,03)^n$ pour n entier.
Si le nombre de mois n'est pas un entier, on a la fonction $P(x) = 2 \times (1,03)^x$ où x est un réel.
On considère qu'un mois dure 30 jours. Au bout de 6 jours, la production sera donc de $P(0,2)$ et au bout de 15 jours de $P(0,5)$.

1. Montrer que P_n est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme 2

$P_n = P_0 \times q^n$ avec $P_0 = 2$ et $q = 1,03$

2. Si on veut calculer la production au bout d'un an et demi, peut-on utiliser la suite ? Quelle est cette production ?

1an ½ = 18 mois, entier, on peut utiliser la suite

$P(18) = 2 \times 1,03^{18} = 3,4048$

3. Calculer la production le 1er février 2020, le 15 mars 2021 et le 5 janvier 2024.
A l'aide de la calculatrice, préciser la date à partir de laquelle le nombre de valves de robinets dépassera 4 500 par jour

le 1er février 2020, $n = 13$, $P_{13} = 2 \times 1,03^{13} = 2,937$

le 15 mars 2021, $x = 24 + 2,5 = 26,5$ $P(26,5) = 2 \times 1,03^{26,5} = 4,377$

le 5 janvier 2024, $x = 60 + 0,16 = 60,16$ $P(60,16) = 2 \times 1,03^{60,16}$

5/31 $= 11,839$

Exercice 10.5 Emma veut vendre un casque audio qu'elle n'utilise plus et dont le prix est compris entre 10 et 30 euros sur les sites de vente d'occasion.
Elle estime que, pour un prix de x euros d'occasion, l'offre $f(x)$ sera $f(x)=1,05^x$ et la demande $g(x)=7\times(1,05)^{-x}$

1. Dresser le tableau de variation et de signes de f et g sur $[10;30]$.

$1,05>1$ donc (Pté 10.2) $f(x)=1,05^x$ ↗

$7>0$ donc (Pté 10.3) $g(x)=7\times1,05^{-x}=\dfrac{7}{1,05^x}$ ↘

f et g sont positives.

x	10		30
f	1,629	↗	4,322

x	10		30
g	4,297	↘	1,619

2. Montrer que le prix d'équilibre (offre=demande) est solution de l'équation $1,1025^x=7$.

$f(x)=g(x) \iff 1,05^x=7\times1,05^{-x} \iff \dfrac{1,05^x}{1,05^{-x}}=7$

$\iff 1,05^{x-(-x)}=7 \iff 1,05^{2x}=7 \iff (1,05^2)^x=7$

$\iff 1,1025^x=7$

3. En déduire (à la calculatrice) le prix d'équilibre et la quantité d'équilibre.

On a équilibre pour $x=20$ (prix d'équilibre)

La quantité d'équilibre est $1,05^{20}=7\times1,05^{-20}=2,65$

(nombre moyen d'acheteurs)

3. Application au taux d'évolution moyen

Définition 10.2 Supposons qu'une grandeur évolue sur plusieurs années (elle augmente ou diminue chaque année d'un pourcentage différent, qui donne un coefficient multiplicateur différent).
Le coefficient multiplicateur global est noté $CM=\frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}$.
Le taux moyen d'évolution t se calcule avec le formule :

$$t=100\left(CM^{\frac{1}{n}}-1\right)$$

Exercice 10.6 La cote en bourse d'une action a augmenté de 3% par an pendant 5 ans. Elle a ensuite baissé de 4% pendant 4 ans, puis a de nouveau augmenté de 2% pendant 3 ans

1. Quel est le taux d'évolution global ?

On n'a pas la valeur initiale, on part de la valeur 100

$100 \xrightarrow{\times1,03} 103 \xrightarrow{\times1,03} 106,09 \xrightarrow{\times1,03} 109,27 \xrightarrow{\times1,03} 112,55 \xrightarrow{\times1,03} 115,92 \xrightarrow{\times0,96} 111,29 \xrightarrow{\times0,96} 106,84$

$\xrightarrow{\times0,96} 102,56 \xrightarrow{\times0,96} 98,46 \xrightarrow{\times1,02} 1,004 \xrightarrow{\times1,02} 1,024 \xrightarrow{\times1,02} 1,04489$

Taux global : $1,03^5\times0,96^4\times1,02^3=1,0489$ ↗ de 4,48%

2. Quel est le taux annuel moyen après ces 12 évolutions ?

$t=100\times\left(\underbrace{1,04489}_{CM}^{1/12}-1\right)=0,367\ \%$

Augmentation de 0,367% par an en moyenne.

3. L'action valait 52 euros. Quelle st sa cote au bout de 12 ans ?

$52 \times \underbrace{1{,}04689}_{\text{cn global (Q° 1°)}} \simeq 54{,}54$ €

Exercice 10.7 Le niveau d'eau d'une rivière a baissé de 11% pendant 4 ans puis a augmenté de 8% pendant 6 ans. Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?

×0.89 ×0.89 ×0.89 ×0.89 ×1,08 ×1,08 ×1,08 ×1.08 ×1,08 ×1.08

$cn_g = 0{,}99564$

$t = 100 \times (0{,}99564^{1/10} - 1) = -0{,}04368$: diminution de 0,04 % par an en moyenne.

Exercice 10.8 La cote argus d'une voiture mise en circulation le 1er avril 2015 est modélisée par la fonction $f(x) = 21345 \times (1,2)^{-x}$, où x est le temps écoulé en années depuis le 1er avril 2015.

1. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Interpréter les résultats.

$f(0) = 21345 \times (1,2)^{-0} = 21\,345$ €, cote à la mise en circulation.

$f(1) = 21345 \times (1,2)^{-1} = 17\,787{,}5$ €, cote au bout d'un an.

2. En déduire le taux de diminution annuel de la valeur de la voiture.

$cn = \frac{V_f}{V_i} = \frac{17\,787{,}5}{21\,345} = 0{,}8333 = 1 - 0{,}167 = 1 - \frac{16{,}7}{100}$

Taux de diminution annuel : baisse de 16,7 % par an.

3. Cette voiture est revendue le 1er octobre 2019.

   (a) Calculer la cote argus de cette voiture à cette date, puis le taux de diminution de la valeur de la voiture depuis son achat.

   2015 → 2019, $x = 4$ ans $\frac{1}{2} = 4{,}5$

   $f(4{,}5) = 21345 \times (1,2)^{-4,5} \simeq 9\,396{,}81$ € cote en 2019.

   $cn = 9\,396{,}81 / 21345 \simeq 0{,}44 = 1 - \frac{55{,}97}{100}$, baisse de 55,97 %

   (b) En déduire le taux mensuel moyen de la décote.

   Taux moyen mensuel de décote : (4 ans $\frac{1}{2}$ = 4.8+6 = 54 mois)

   $t = 100 \times (cn^{1/n} - 1)$

   $t = 100 \times (0{,}44^{1/54} - 1) \simeq -1{,}5$

   baisse de 1,5 % par mois.

Exercice 10.9 Paul, élève de Terminale STMG, dispose de 300 euros qu'il souhaite placer sur un livret au taux annuel de $3,90\%$.

1. Quel est son capital au bout de 36 mois ?

   36 mois = 3 ans

   $300 \times 1,0390^{3} = 336,68$ €

2. Il a 18 ans. Quel sera son capital quand il aura doublé son âge ?

   $300 \times 1,039^{18} = 597,31$ €

3. En combien de temps aura-t-il doublé son capital initial ?

   À la calculatrice, $f(x) = 300 \times 1,039^{x}$

   $f(x) = 600$ pour $x = 19$, donc au bout de 19 ans.

   ($f(18) \simeq 597$ €, $f(19) \simeq 620$ €)